

文章编号: 1000-8055(2000)04-0413-06

# 转子—非圆轴承系统 非线性动力学行为的研究

焦映厚<sup>1</sup>, 陈照波<sup>1</sup>, 夏松波<sup>1</sup>, 陈 明<sup>1</sup>, 黄文虎<sup>1</sup>, 张直明<sup>2</sup>

1 哈尔滨工业大学, 黑龙江 哈尔滨 150001;  
2 上海大学 轴承研究院, 上海 200

**摘要:** 非线性油膜力数据库方法获得非圆滑动轴承的非线性油膜力, 利用 Runge-Kutta 法、Poincaré 映射和频谱图对刚性 Jeffcott 转子—椭圆轴承系统在较宽参数范围内的分叉和非线性动力学行为进行研究。得到了系统在某些参数域的分叉图、时间历程、频谱图、相图、Poincaré 映射图。研究表明: 在特定参数范围内系统存在倍周期分叉、Hopf 分叉、解的跳跃、 $K-T$  周期解、概周期运动和混沌运动等非线性动力学行为。非线性油膜力数据库方法获得的非线性油膜力能准确揭示转子—椭圆轴承系统丰富的非线性动力学行为, 为研究大型旋转机械的非线性动力学问题提供了理论基础。

**关键词:** 非线性力学; 油膜; 周期解; 分叉; 混沌  
**中图分类号:** O 322; TH 133 **文献标识码:** A

## 1 引 言

采用传统转子动力学理论研究转子—轴承系统时, 一般采用 8 个线性化的刚度与阻尼特性系数的油膜力模型, 对存在的许多由非线性因素引起的各种复杂动力学行为的分析是无能为力的。滑动轴承的油膜力具有强烈的非线性特性, 研究转子—轴承系统的非线性动力学问题关键在于准确的获得非线性油膜力, 非线性油膜力的计算精度和计算速度将直接影响系统非线性动力学分析的计算精度和效率。目前国内外研究者大多采用下述方法获得非线性油膜力: (1) 直接用数值计算方法解 Reynolds 方程<sup>[1,2]</sup>; (2) 采用近似计算方法, 如短轴承和长轴承的近似理论<sup>[3~7]</sup>。直接数值计算方法因其庞大的计算工作量只能用在一些简单的非线性分析计算上。近似计算方法虽有较高的计算速度, 但计算精度却不尽人意; 近似计算方法只能近似获得圆柱轴承的非线性油膜力, 不能获得非圆滑动轴承的非线性油膜力。

非线性油膜力数据库方法通过特殊的技巧处

理直接求解 Reynolds 方程, 应用插值计算和组装各种类型轴承的子程序, 不但可以获得圆柱轴承的非线性油膜力, 而且可以获得各种类型非圆滑动轴承的非线性油膜力, 非线性油膜力数据库方法具有计算精度高和快速高效的优点。因此本文应用非线性油膜力数据库方法获得非线性油膜力, 结合 Runge-Kutta 法、Poincaré 映射图和频谱图对刚性 Jeffcott 转子—椭圆轴承系统在较宽参数范围内的分叉和非线性动力学行为进行研究。

## 2 Jeffcott 转子—轴承系统模型 及非线性油膜力

### 2.1 Jeffcott 转子—轴承系统模型

Jeffcott 转子—轴承系统在直角坐标系中的力学模型如图 1 所示, 图中  $G$  为外载荷,  $o$  为轴瓦几何中心,  $o_1$  为转子几何中心,  $o_2$  为转子质心, 采用对称结构椭圆轴承支承的转子系统无量纲运动微分方程为:

收稿日期: 1999- 10- 18; 修订日期: 2000- 01- 13

基金项目: 国家自然科学基金(重大)资助项目(19990510); 黑龙江省自然科学基金资助项目

作者简介: 焦映厚(1962- ), 男, 哈尔滨工业大学机电学院副教授, 在职博士生

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 1/f_{xm} + \rho \sin(\tau) \\ \ddot{y} &= 1/f_{ym} + \rho \cos(\tau) + G \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

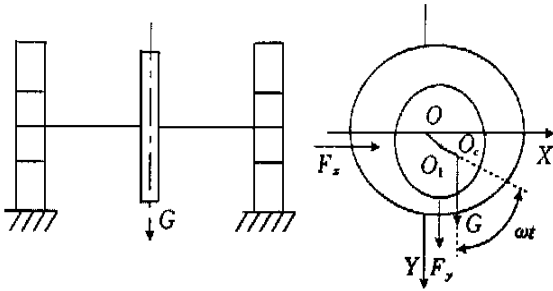


图 1 转子—椭圆轴承系统力学模型

转子几何中心无量纲坐标  $x, y = X/C_{min}, Y/C_{min}$ ;  
 $\dot{x}, \dot{y} = \dot{X}/(C_{min}\omega), \dot{Y}/(C_{min}\omega)$ ;  $\ddot{x}, \ddot{y} = \ddot{X}/(C_{min}\omega^2), \ddot{Y}/(C_{min}\omega^2)$ ;  $f_x = (F_x\Psi^2)/(LD\eta\omega)$ 。  $f_x, f_y$  为无量纲非线性油膜力分量, 无量纲质量偏心距  $\rho = e/c$ ,  $e = O_1O_c, G = g/(C_{min}\omega^2), \Psi = 2C_{min}/D, m = m_R C_{min}\omega\Psi^2/(\eta LD)$ ;  $m_R$  为转子质量之半,  $\omega$  为转子角速度,  $D$  为轴颈直径,  $L$  为轴瓦宽度,  $\eta$  为润滑油粘度,  $C_{min}$  为轴承最小半径间隙。

## 2.2 非线性油膜力数据库方法获得非线性油膜力

非线性数据库方法关键在于确定动态雷诺方程中扰动项的数值范围, 动态雷诺方程:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( H^3 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \left( \frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial P}{\partial x^2} = -6\epsilon(1-2\theta)\sin\varphi + 12\epsilon\cos\varphi \quad (2)$$

令  $RS = -6\epsilon(1-2\theta)\sin\varphi + 12\epsilon\cos\varphi$

经推导可得下面几种处理情况<sup>[8]</sup>:

- (1) 令  $P_1 = P/(\epsilon|1-2\theta|)$ ,  $q_1 = 2\epsilon'/(\epsilon|1-2\theta|)$   
 当  $\epsilon|1-2\theta| \geq 2\epsilon', \epsilon|1-2\theta| < 0$  时  
 $RS(1) = -6\sin\varphi - 6q_1\cos\varphi$   
 当  $\epsilon|1-2\theta| \geq 2\epsilon', \epsilon|1-2\theta| < 0$  时  
 $RS(2) = 6\sin\varphi - 6q_1\cos\varphi$
- (2) 令  $P_2 = P/(2\epsilon')$ ,  $q_2 = \epsilon(1-2\theta)/(2\epsilon')$   
 当  $\epsilon|1-2\theta| \leq 2\epsilon', \epsilon > 0$  时  
 $RS(3) = -6q_2\sin\varphi - 6\cos\varphi$   
 当  $\epsilon|1-2\theta| \leq 2\epsilon', \epsilon < 0$  时  
 $RS(4) = 6q_2\sin\varphi - 6\cos\varphi$
- (3) 当  $\epsilon(1-2\theta) = 0, \epsilon \neq 0$  时

切向和径向油膜力  $F_S = 0.0, F_C = 0.0$

通过对动态雷诺方程的处理, 解决了  $\epsilon', \theta$  在范围  $(-\infty, \infty)$  难以确定的矛盾, 变成动态雷诺方程在  $q(q_1, q_2) = (-1, 1)$  范围内求解, 从而解决了

建立非线性油膜力数据库的关键问题。建库算法采用 Castelli 法求解动态雷诺差分方程, 边界条件采用雷诺边界条件。以单瓦为基础, 可以建立在各种长径比和瓦张角下的单瓦库。建库由 3 个变量决定: 偏心  $\epsilon = (0, 0.95)$ , 瓦的起始角  $TH = (0^\circ, 360^\circ)$ , 挤压比  $q(q_1, q_2) = (-1, 1)$ 。对  $\epsilon, TH, q$  分别采用两点、三点插值, 根据各种实用轴承的结构, 编写了各种滑动轴承的拼装子程序: 360 圆轴承, 剖分式圆轴承, 椭圆轴承, 错位椭圆轴承, 三油叶轴承, 四油叶轴承等, 只要调用相应拼装子程序和单瓦库即可获得各种类型轴承在直角坐标下的非线性油膜力  $f_x, f_y$ 。

## 3 数值计算结果

取  $m_R = 10700 \text{ kg}; D = 420 \text{ mm}; C_{min} = 0.699 \text{ mm}; L = 201.6 \text{ mm}; \eta = 17.8 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ; 瓦张角为  $150^\circ$ ; 瓦起始角为  $15^\circ$ ; 预负荷系数为  $0.2, \omega$  为分叉变量。对式(1)进行数值积分计算得不同偏心下的分叉图。图 2(a) 是  $\rho = 0.02$  的分叉图, 由图可见, 系统经历了同步周期运动; (b) 是  $\rho = 0.07$  的分叉图, 由图可见, 系统经历了同步周期运动倍周期分叉倍周期运动同步周期运动; (c) 是  $\rho = 0.1$  的分叉图, 由图可见, 系统经历了同步周期运动→倍周期分叉→倍周期运动→同步周期运动→Hopf 分叉→概周期运动→同步周期运动; (d) 是  $\rho = 0.2$  的分叉图, 由图可见, 系统经历了同步周期运动→倍周期分叉→倍周期运动→概周期运动→ $3-T$  周期运动→混沌运动→倍周期运动失稳; (e) 是  $\rho = 0.3$  的分叉图, 由图可见, 系统经历了同步周期运动→倍周期分叉→倍周期运动→概周期运动→ $5-T$  周期运动→概周期运动→ $5-T$  周期运动→混沌运动→ $4-T$  周期运动→倍周期运动→ $4-T$  周期运动→混沌运动; (f) 是  $\rho = 0.4$  的分叉图, 由图可见, 系统经历了同步运动→倍周期分叉→倍周期运动→混沌运动→倍周期运动→混沌运动→ $4-T$  周期运动→ $3-T$  周期运动→ $4-T$  周期运动→混沌运动→ $4-T$  周期运动→ $3-T$  周期运动, 周期倍化是通向混沌运动的道路之一; (g) 是  $\rho = 0.5$  的分叉图, 由图可见, 系统经历了同步周期运动→倍周期分叉→倍周期运动→解的跳跃→同步周期运动→混沌运动; (h) 是  $\rho = 0.6$  的分叉图, 由图可见, 系统经历同步运动周期→解的跳跃→同步周期运动。

图 3~ 图 5 分别是  $\omega = 225 \text{ rad/s}, \rho = 0.07$ ;  $335 \text{ rad/s}, \rho = 0.2$ ;  $400 \text{ rad/s}, \rho = 0.2$  下系统的分

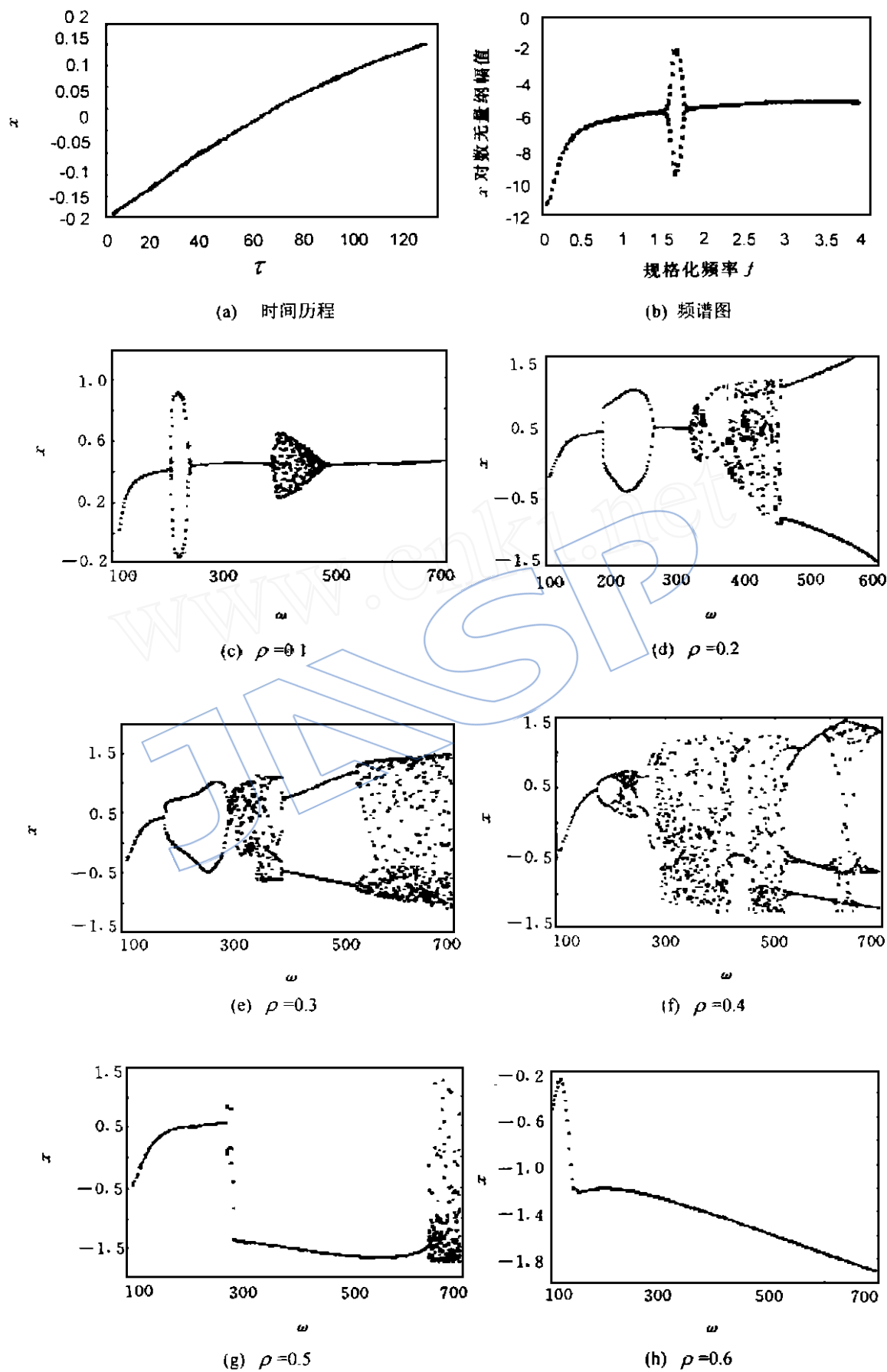


图 2 分叉图

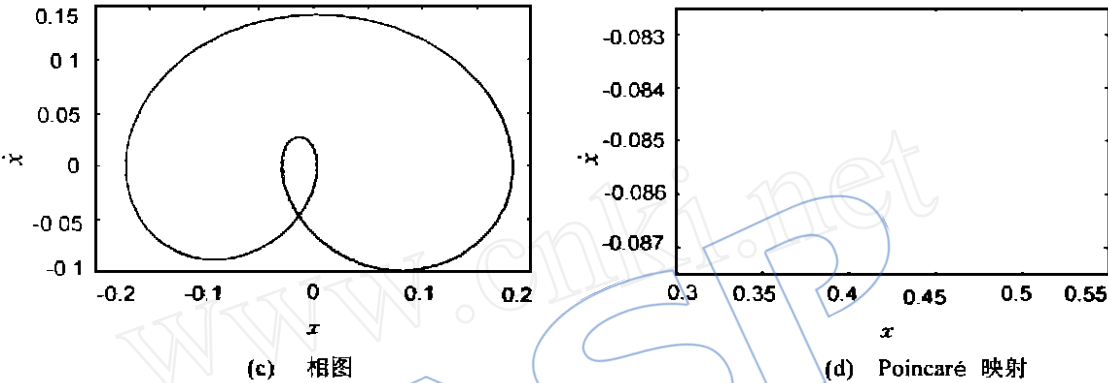
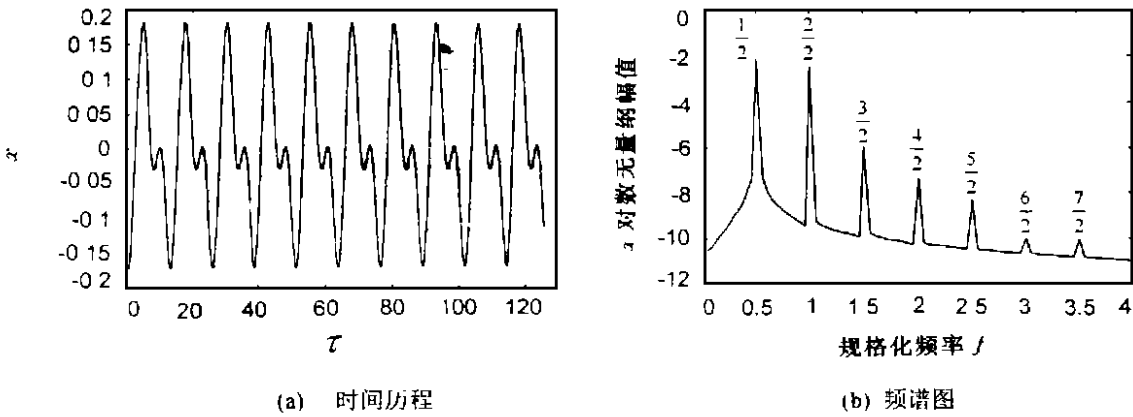


图 3 分析图 ( $\omega=225 \text{ rad/s}$ ,  $\rho=0.07$ )

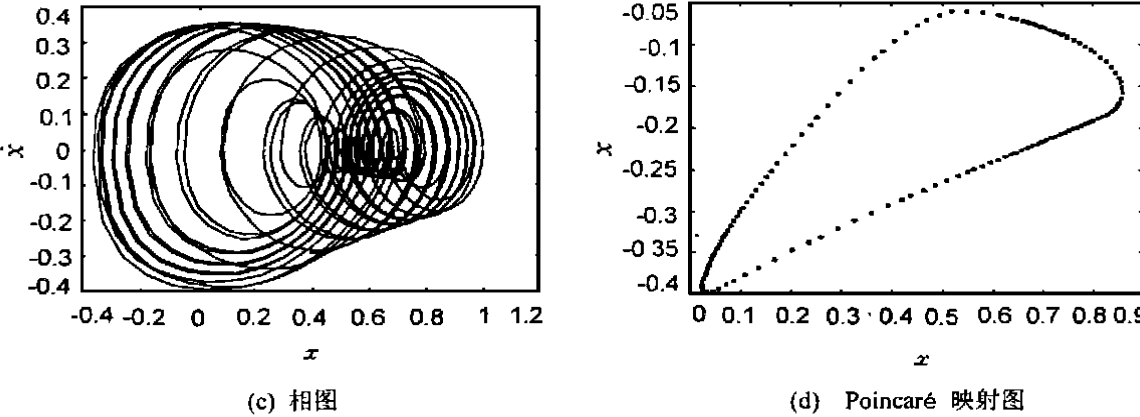
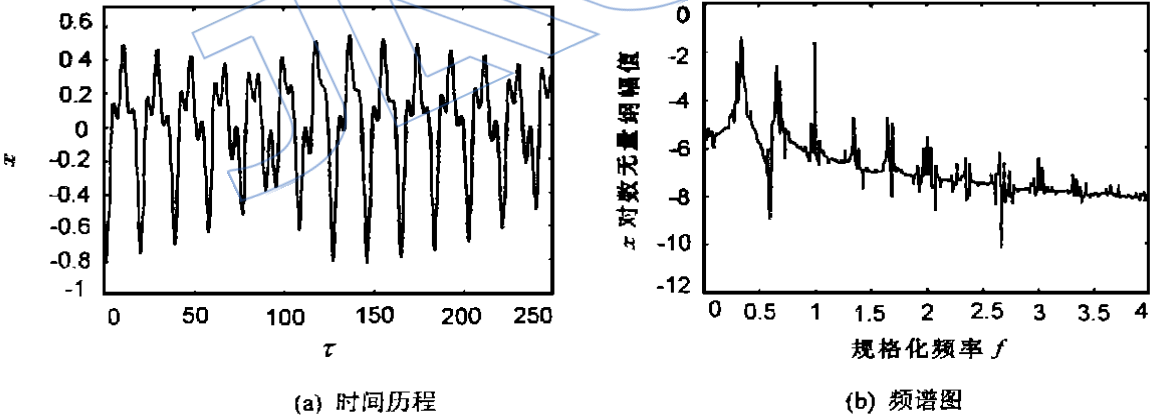


图 4 分析图 ( $\omega=335 \text{ rad/s}$ ,  $\rho=0.2$ )

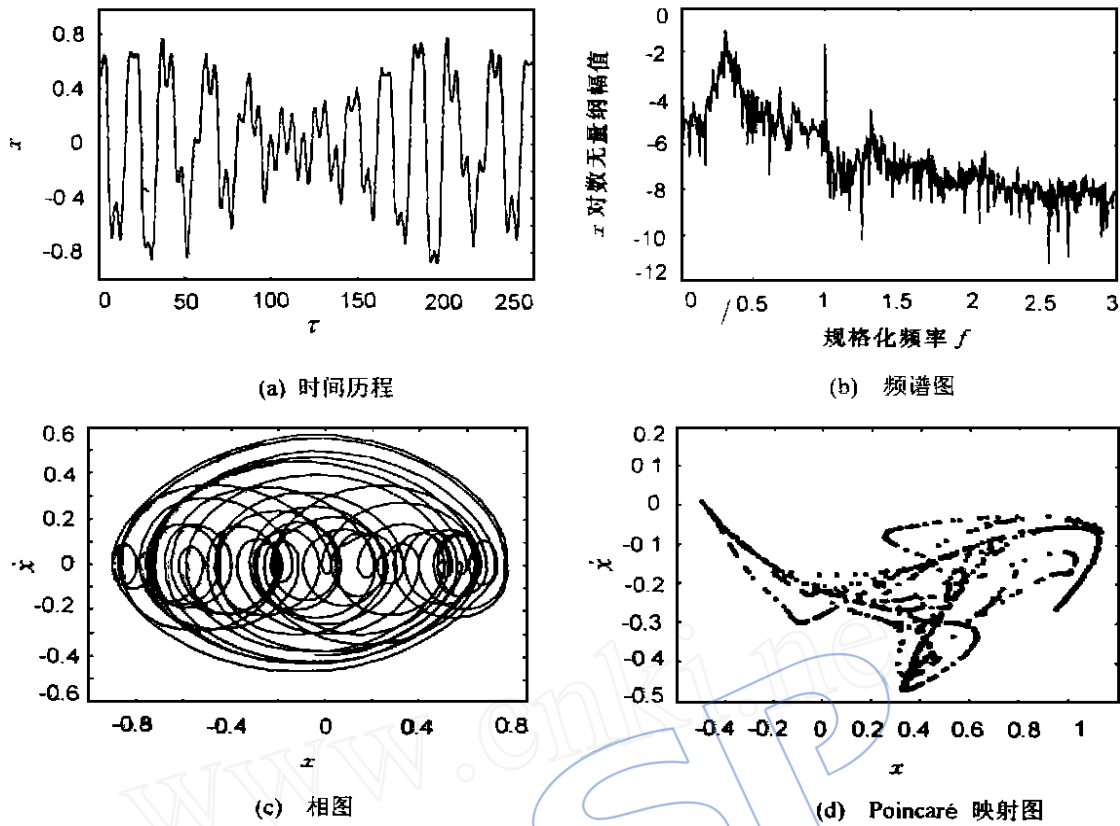


图 5 分析图 ( $\omega=400\text{ rad/s}$ ,  $\rho=0.2$ )

析图。(a), (b), (c), (d) 分别是对应系统的时间历程、频谱图、相图、Poincaré 映射图。 $T=2\pi$  为系统的基本周期, 基本频率  $f=1/T$ 。由图 3, (b) 的频谱图可以看出此时系统存在  $1/(2T)$  的整数倍频率, (d) 的 Poincaré 映射为 2 个点, 说明此时系统为倍周期解, 即 2 次亚谐波。由图 4(b) 的频谱图可以看出此时系统频率并不是  $1/(KT)$  的整数倍, 系统是由一定数量的周期运动的组合, (d) 的 Poincaré 映射为环面, 说明此时系统为概周期运动。由图 5(b) 的频谱图可以看出此时系统的频谱图与周期解、概周期解不同, 它具有频率成分无规则的波动、连续的、宽带频率成分特性。(c) 的相图是一个奇怪吸引子, (d) 的 Poincaré 映射图具有无穷层次的几何自相似结构, 是典型的混沌运动, 其特性由分形维数确定。

4 结 论

(1) 非线性油膜力数据库方法获得非线性油膜力能准确揭示转子-非圆轴承系统丰富的非线性动力学行为。在特定参数范围内系统存在倍周期分叉、Hopf 分叉、解的跳跃、 $K-T$  周期解、概周期运动和混沌运动等非线性动力学行为。

- (2) 无量纲质量偏心  $\rho=0.2$  时, 系统随着转速的升高最后以倍周期大幅值运动而失稳。
- (3) 无量纲质量偏心  $\rho<0.2$  系统常发生  $K-T$  周期运动, 概周期运动, 概周期运动常发生于倍周期分叉后。
- (4) 无量纲质量偏心  $\rho=0.2\sim 0.4$ , 转速在特定范围内系统均可发生混沌运动, 周期解倍化是通向混沌的道路之一。
- (5) 随着无量纲质量偏心的增加倍周期分叉点前移, 无量纲质量偏心  $\rho>0.5$  时, 系统的非线性动力学行为明显减少, 有时会发生解的跳跃现象和混沌运动, 但一般为同步运动。

参考文献

[1] Hori Y, Kato T. Earthquake-Induced Instability of a Rotor Supported by Oil Film Bearings[J]. Journal of Vibration and Acoustics, Transaction of the ASME, 1990, 112: 160-165

[2] 焦映厚, 陈照波等. 非线性转子动力学的研究现状与展望[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1999, 31(3): 1-4

[3] 张直明主编. 滑动轴承的流体动力润滑理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1986

[4] Chieh-Li Chen, Her-Terng Yua. Chaos in the Imbalance

- Response of a Flexible Rotor Supported by Oil Film Bearing with Non-Linear Suspension [J]. Nonlinear Dynamics, 1998, 16: 71- 90
- [5] Adiletta G, Guido A R, Rossi C. Chaotic Motions of a Rotor in Short Journal Bearings[J]. Nonlinear Dynamics, 1996, 10: 251- 269
- [6] 赵永辉, 王莉等. 非线性转子- SFD 支承系统的分叉[J]. 航空动力学报, 1999, 14(4): 353- 356
- [7] 陈予恕等. 非线性转子- 轴承系统的分叉[J]. 振动工程学报, 1996, 9(3): 266- 275
- [8] 王文, 张直明. 油叶型轴承非线性油膜力数据库[J]. 上海工业大学学报, 1993, 14(4): 299- 305
- (责任编辑 王震华)

## Study on Nonlinear Dynamic Behavior of Rotor- Non-Circular Bearing System

JIAO Ying-hou<sup>1</sup>, CHEN Zhao-bo<sup>1</sup>, XIA Song-bo<sup>1</sup>,  
HUANG Wen-hu<sup>1</sup>, ZHANG Zhiming<sup>2</sup>

{ 1. Power Engineering College, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;  
2 Bearing Institute, Shanghai University, Shanghai 2000, China }

**Abstract:** The nonlinear dynamic bifurcation behavior of a rigid Jeffcott rotor-non-circular bearing system was investigated in a wide range of parameters based with the help of Runge-Kutta method, Poincaré map and frequency spectrum. The journal bearing oil film forces were obtained from database. The diagrams of bifurcation, time course, frequency spectrum, phase and Poincaré map diagrams with some typical system parameters were numerically worked out. The results show that there exist abundant nonlinear dynamic behaviors such as double-period bifurcation, Hopf bifurcation, jump phenomenon,  $K-T$  periodic solution, quasi-periodic and chaotic motions and so on. The database method can provide the journal bearing oil film forces accurately and effectively for nonlinear dynamic analysis of rotor- non-circular bearing system.

**Key words:** nonlinear mechanics; oil film; periodic solution; bifurcation; chaos

(The Chinese test of the following abstract is printed in PP410- 412)  
(上接第 412 页)

## Dynamic Optimum Design of Power Shared out Equally Among the Planetary Gears

YUAN Ru, WANG San-min, SHEN Yun-wen

(2nd Dept. Northwest Polytechnic University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** The supporting stiffness of the floating parts has great effects on the power shared out among planetary gears and on the dynamic load on the meshing gears. A dynamic model of  $2K-H$  planetary gear train has been developed. The factor  $K_c$  and factor  $K_d$  are introduced for measuring the unbalance of power and dynamic load. For the purpose of reducing the unbalance of power and the dynamic load, a dynamic optimum method is used to determine the supporting stiffness of the floating parts. The dynamic characteristics of planetary transmission designed by optimum method have been analyzed. It is found that the values of  $K_c$  and  $K_d$  are fairly small.

**Key words:** planetary gear drives; power; dynamic balancing; optimization; dynamic load